Samuele Caneschi, Tea Castellucci e Sofia Roselli della classe 2°D del Liceo Scientifico "Francesco Redi" di Arezzo in collaborazione con l'insegnante di matematica Vanna Padrini presentano...

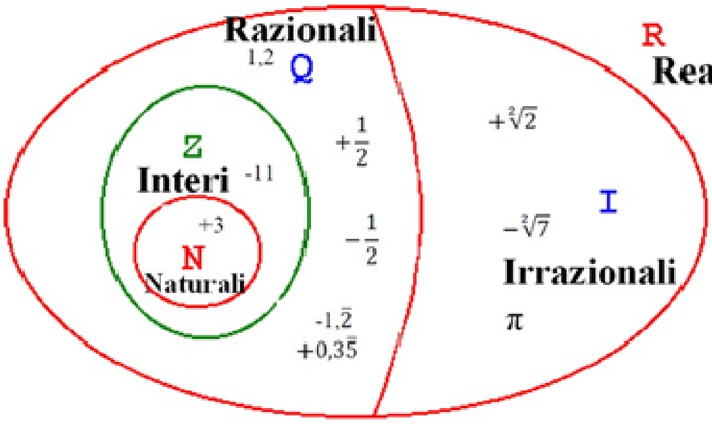
Dall'impossibilità alla certezza: viaggio nel mondo degli irrazionali.

Strada principale e strade secondarie, Paul Klee

La radice di 2: un numero semplice nella sua complessità.

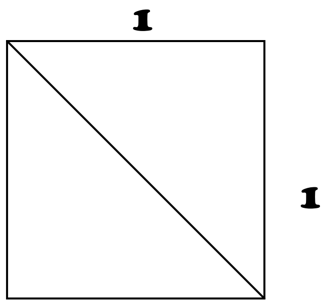
In seguito alla lettura del libro "Il teorema del pappagallo", romanzo giallo dell'algerino Denis Guedj, dove la narrativa si intreccia con la matematica creando un'opera nuova ed originale, abbiamo deciso di approfondire l'argomento degli irrazionali e della radice di 2 che ci hanno particolarmente interessato.

Il concetto di irrazionalità è uno dei più importanti di tutta la matematica. La radice di 2 non è affatto il solo numero irrazionale, tuttavia proprio per la sua semplicità è spesso portata come esempio; infatti, se gli irrazionali sono «i più complicati tra i numeri», la radice di 2 è , in un certo senso, il più semplice di questi numeri complicati.



I numeri irrazionali nacquero nell'Antica Grecia. Qui precedentemente si riteneva che tutte le grandezze si potessero esprimere attraverso i numeri interi o razionali (le frazioni), che altro non sono che rapporti tra numeri interi. Ancora i Greci non prendevano in considerazione quelli negativi, poiché i numeri erano concepiti per la misura, e quindi non esistevano oggetti di misure negative. Tra i pitagorici emerse un problema: qual era la misura della diagonale di un quadrato di lato 1? Qual era il rapporto che legava il lato del quadrato con la sua diagonale? La misura della diagonale, come ci insegna il teorema di Pitagora, si calcola come sotto indicato:

$$\sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{2}$$



Esiste davvero un numero che ha come quadrato 2? I Greci dimostrarono che non esisteva alcun numero razionale corrispondente alla radice quadrata di 2. Questa "scoperta" fu un vero e proprio "scandalo logico", poiché rappresentò la fine del pensiero dei pitagorici, che si basava sull'armonia e sull'onnipotenza dei rapporti razionali tra le cose del mondo: i numeri erano stati concepiti per la misura e in quel caso non si trovava un numero che potesse rappresentarne una. La diagonale del quadrato e il lato erano incommensurabili, cioè non avevano alcun sottomultiplo in comune, ovvero il loro rapporto non poteva essere espresso da una frazione con numeratore e denominatore

interi. Era stato proprio il quadrato, la figura perfetta per antonomasia assieme al cerchio, a provocare tutti questi problemi. Nessuno se lo sarebbe mai aspettato. L'incommensurabilità infatti è una proprietà che esiste ma che non si vede. La coesistenza di lato e diagonale è la prova che esistono molti altri tipi di numeri. Tutto quello che si poteva costruire si poteva anche misurare, ma da quel momento non era sempre così scontato.

L'irrazionalità della radice di due è dimostrabile per assurdo, metodo con il quale si nega la tesi, ovvero ciò che si vuole dimostrare, per arrivare alla negazione dell'ipotesi, ciò che sappiamo fino all'inizio; negando l'ipotesi cadiamo in assurdo e quindi possiamo considerare valida la nostra tesi.

Prendiamo un numero razionale irriducibile, ovvero i cui termini sono primi tra loro, a/b. Supponiamo che $(a/b)^2 = 2$, dunque $a^2/b^2 = 2$ e $a^2 = 2b^2$. Deduciamo quindi che a è un numero pari, poiché è uguale a un doppio e solo il quadrato di un numero pari è pari. Sappiamo che a è il doppio di un numero che chiamiamo c, dunque $a = 2c$. Nell'uguaglianza iniziale $a^2 = 2b^2$ sostituiamo a con 2c e otteniamo $(2c)^2 = 2b^2$ che è equivalente a $4c^2 = 2b^2$, quindi $2c^2 = b^2$. Pertanto se b^2 è uguale a un doppio, b è pari. Qui cadiamo in assurdo, perché da un lato a e b non possono essere entrambi pari in quanto primi tra loro, dall'altro sono tutti e due pari. Quindi non esiste una frazione il cui quadrato sia 2.

Le applicazioni della radice quadrata di due, al contrario di quanto si pensi, sono innumerevoli e si trovano anche al di fuori della matematica nel mondo reale: ad esempio troviamo la radice di due nel formato dei fogli da stampante, nei campi da calcio e persino nei comignoli di Neuchatel.
Le vere misure di un foglio di carta da stampante A4 sono, in centimetri 21, 02241038... x 29,73017787... e il loro rapporto è ,con una buona approssimazione, $1 : \sqrt{2}$. Si tratta di un rettangolo che segue la norma internazionale chiamata ISO 216; se si taglia tale rettangolo a metà otteniamo due rettangoli uguali tra loro e ciascuno dei quali è simile al rettangolo di partenza: le dimensioni dei due rettangoli hanno lo stesso rapporto $(1 : \sqrt{2})$. Tale tipologia di rettangolo che mantiene i rapporti delle dimensioni se tagliato a metà e che ha un rapporto $1 : \sqrt{2}$, è detto "rettangolo diagonale" o "rettangolo d'argento.
Molti campi di calcio adottano le misure di un "rettangolo diagonale", all'incirca 130 metri per 90 metri, perché nelle partite

giovanili si divide il campo a metà, mantenendo in tal modo le stesse proporzioni.
L'applicazione più insolita ed originale è quella dei comignoli di Neuchatel. Attualmente, secondo il regolamento, in questo comune svizzero i comignoli delle case devono avere un'altezza massima corrispondente a 1/10 della larghezza della strada moltiplicata per la radice quadrata di due.

«Pitagora mi ha colpito molto per il fatto che ricercava sempre i numeri nelle cose, il suo obiettivo e quello dei Pitagorici era quello di dare un fondamento numerico alla conoscenza della natura, andando oltre l'arte del puro calcolo e studiando i numeri in sé. »

Sofia Roselli

«Un aspetto interessante della radice di 2 è la rivoluzione nel pensiero dei pitagorici, che non si limitava solo all'ambito puramente matematico, ma anche alla concezione dei rapporti tra le cose della natura.»

Tea Castellucci

« La radice di 2 ci offre un esempio di come la matematica sia stata creata da uomini che hanno dedicato a questa scienza tutta la loro vita, cimentandosi su problemi complessi per quei tempi, poiché completamente nuovi per il loro pensiero. Non tutti si rendono conto di quante persone abbiano lavorato per arrivare a tutto ciò che sappiamo oggi perché si dà per scontato che la matematica sia sempre stata così.»

Samuele Caneschi